

离散数学

第六章: 几个典型的代数系统

卢杨

厦门大学信息学院计算机科学与技术系

luyang@xmu.edu.cn





6.1 群, 环与域



半群, 独异点与群

定义 6.1&6.2

设 $V = \langle S, \circ \rangle$ 是代数系统, \circ 为二元运算的.

- (1) 如果 \circ 是可结合的, 则称 $V = \langle S, \circ \rangle$ 为**半群**;
- (2) 如果半群 V 具有单位元 e , 则称 $V = \langle S, \circ, e \rangle$ 为**独异点**.
- (3) 如果 G 是独异点, 并且 S 中任何元素 x 都有逆元, 则称 $G = \langle S, \circ, e \rangle$ 为**群**.

由上述定义有:

$$\{\text{群}\} \subset \{\text{独异点}\} \subset \{\text{半群}\} \subset \{\text{代数系统 (广群)}\}$$

- 验证一个代数系统是群, 只需四点: 封闭性, 结合律, 单位元, 逆元.
- 方便起见, 在不引起混淆的时候也用 V 表示 V 中的集合 S . 因此, 可以说群 G 中的某个元素.



半群, 独异点与群

例 6.1 (1) \mathbf{N} , \mathbf{Z} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} 关于普通加法和乘法都可以构成半群和独异点; \mathbf{Z}^+ 关于普通乘法可以构成半群和独异点 $\langle \mathbf{Z}^+, \times \rangle$, 而关于普通加法只能构成半群 $\langle \mathbf{Z}^+, + \rangle$ (单位元0没了).

对于普通加法, 只有 $\langle \mathbf{Z}, + \rangle$, $\langle \mathbf{Q}, + \rangle$, $\langle \mathbf{R}, + \rangle$ 是群, $\langle \mathbf{N}, + \rangle$ 不是群, 因为 \mathbf{N} 中不是所有元素都有逆元.

对于普通乘法, 只有 $\langle \mathbf{Q}^+, \times \rangle$, $\langle \mathbf{R}^+, \times \rangle$ 是群, 因为它们没有0, 0关于普通乘法没有逆元.

(2) $n(n \geq 2)$ 阶实矩阵 $M_n(\mathbf{R})$ 关于矩阵加法或矩阵乘法都能构成半群和独异点. 它不是群, 因为不是所有的实矩阵都存在逆矩阵.

(3) 有穷字母表 Σ 上所有有限长度的字符串的集合 Σ^* , 关于串的连接运算 \circ 能构成半群和独异点. 其中, 空串是单位元. 它不是群, 因为除了空串外其他的串都没有逆元.



半群, 独异点与群

- (4) 幂集 $P(B)$ 关于集合的并, 交和对称差运算都可以构成半群和独异点. 其中只有关于对称差的代数系统是群, 因为对于任何 $A \in P(B)$, A 的逆元就是自身, 即 $A \oplus A = \emptyset$.
- (5) $\mathbf{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ 关于模 n 加法 \oplus 能构成半群和独异点. 它是群, 若 $x = 0$, 则 x 的逆元就是 x ; 若 $x \neq 0$, 则 $n - x$ 就是 x 的逆元.
- (6) $\langle \mathbf{R}^*, \circ \rangle$ 为半群, $\forall x, y \in \mathbf{R}^*, x \circ y = y$. 因为 \circ 是可结合的, 但是该半群没有单位元.
- (7) A 上所有关系的集合 S 关于关系的右复合运算 \circ 能构成半群和独异点. 其中, 恒等关系是单位元. 它不是群.
- (8) S 为任意非空集合, a 为 S 中某个指定的元素, 且 $\forall x, y \in S, x * y = a$, $\langle S, * \rangle$ 为半群.



半群, 独异点与群

例 6.2

- 令 $G = \{e, a, b, c\}$, \cdot 是 G 上的二元运算, 由上表给出.
- 在 a, b, c 中, 任两个元素运算结果等于第三个元素.
- 容易验证 \cdot 运算是可结合的, e 是 G 中的单位元, $\forall x \in G, x^{-1} = x$, G 关于 \cdot 运算构成一个群.
- 称这个群为 Klein 四元群.

| \cdot | e | a | b | c |
|---------|-----|-----|-----|-----|
| e | e | a | b | c |
| a | a | e | c | b |
| b | b | c | e | a |
| c | c | b | a | e |



半群, 独异点与群

例 6.3

考虑模 n 加群 $\langle \mathbf{Z}_n, \oplus \rangle$, 其中

$$\mathbf{Z}_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, \forall x, y \in \mathbf{Z}_n,$$

$$x \oplus y = (x + y) \bmod n.$$

- 例如模6加群 \mathbf{Z}_6 , 其运算表如该表所示.
- 该表中, 上一行循环左移得下一行.

| \oplus | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |

半群, 独异点与群

例 6.6

设 $N = \{1, 2, 3\}$, 如下定义 N 上的 6 个函数:

$$f_1 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\}, \quad f_2 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 3 \rangle\},$$

$$f_3 = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 2 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}, \quad f_4 = \{\langle 1, 1 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\},$$

$$f_5 = \{\langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 1 \rangle\}, \quad f_6 = \{\langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 1 \rangle, \langle 3, 2 \rangle\},$$

$$S = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\},$$

则 S 关于函数的右复合运算是否构成群?

解 构成群. 其单位元是恒等函数 f_1 ;

f_1, f_2, f_3, f_4 的逆元都是自身, f_5 与 f_6 互为反函数, 即互为逆元.



群

定义

- (1) 若群 G 为有穷集, 则称 G 为**有限群**, 否则称为**无限群**. 有限群 G 的元素数记作 $|G|$, 称为 G 的**阶**.
- (2) 若群 G 中只含有一个元素, 则称 G 为**平凡群**.
- (3) 若群 G 中的二元运算是可交换的, 则称 G 为**交换群**或**Abel群**.

例

- $\langle \mathbf{Z}, + \rangle$, $\langle \mathbf{Q}, + \rangle$, $\langle \mathbf{R}, + \rangle$ 都是无限群, Klein四元群是4阶群.
- $\{0\}$ 关于普通加法构成平凡群, $\{1\}$ 关于普通乘法构成平凡群.
- Klein四元群和模 n 加群都是Abel群, 但是上例中的函数右复合群不是Abel群, 因为右复合不满足交换律.



群中元素的次幂

定义

对于任意整数 n , 群中元素 x 的 n 次幂 x^n 定义如下:

$$\begin{aligned}x^0 &= e, \\x^{n+1} &= x^n x, n \in \mathbf{N}, \\x^{-n} &= (x^{-1})^n.\end{aligned}$$

注意此处 n 是自然数的条件. $n < 0$ 时没定义.

例 6.5 (1) $G = \langle \mathbf{Z}, + \rangle$, 则

$$1^{-3} = (1^{-1})^3 = (-1)^3 = (-1) + (-1) + (-1) = -3,$$

$$(-4)^{-2} = ((-4)^{-1})^2 = 4^2 = 4 + 4 = 8.$$

(2) $G = \langle \mathbf{Z}_6, \oplus \rangle$, 则

$$2^3 = 2 \oplus 2 \oplus 2 = 0,$$

$$2^{-4} = (2^{-1})^4 = 4^4 = 4 \oplus 4 \oplus 4 \oplus 4 = 4.$$



群中元素的阶

定义

G 是群, 设 x 是群的元素, 使得 $x^k = e$ 成立的**最小正整数** k , 称为 x 的**阶**. 如果 x 的阶存在, 则记作 $|x|$. 如果不存在, 则称 x 是**无穷阶的**.

- **注意和群的阶进行区分.**
- 在有限群 G 中, 元素的阶一定存在, 且是群 G 的阶的因子.
- 单位元 e 自身是1阶元, 因为 $e^1 = e^0 e = e$. 因此一个群里总是存在1阶元.

例 (1) 整数加群 $\langle \mathbf{Z}, + \rangle$ 中只有 $|0| = 1$, 其他元素的阶都不存在.

(2) 模6加群 $\langle \mathbf{Z}_6, \oplus \rangle$ 中, $|0| = 1$, $|1| = |5| = 6$, $|2| = |4| = 3$, $|3| = 2$.

(3) Klein四元群 $G = \{e, a, b, c\}$ 中, e 是1阶元, a , b 和 c 都是2阶元, 因为 $\forall x \in G$, $x^2 = e$.



群的基本性质

- 下面讨论群的性质, 在一般情况下, 可以省略二元运算符。

定理 6.1

设 G 为群, $m, n \in \mathbf{Z}$, 则 G 中的幂运算满足:

$$(1) \forall a \in G, (a^{-1})^{-1} = a,$$

$$(2) \forall a, b \in G, (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1},$$

$$(3) \forall a \in G, a^n a^m = a^{n+m},$$

$$(4) \forall a \in G, (a^n)^m = a^{mn}.$$

证明

(1) $(a^{-1})^{-1}$ 是 a^{-1} 的逆元, a 也是 a^{-1} 的逆元. 根据逆元的唯一性, 命题得证.



群的基本性质

$$(2) \forall a, b \in G, (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$$

证明 只需证明 $b^{-1}a^{-1}$ 是 ab 的逆元即可.

根据群的定义, 以及逆元的定义有,

$$(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b = b^{-1}eb = b^{-1}b = e,$$

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e.$$

由此可见, $b^{-1}a^{-1}$ 是 ab 的逆元, 命题得证.

■ 通过归纳可推广:

$$(a_1a_2, \dots, a_n)^{-1} = a_n^{-1} \dots a_2^{-1}a_1^{-1}.$$



群的基本性质

$$(3) \forall a \in G, a^n a^m = a^{n+m}$$

证明

由于该定理没有对 n 和 m 的正负情况加以限定, 因此需要分类讨论.

- 先考虑 n 和 m 都是自然数的情况 ($n \geq 0, m \geq 0$). 任意给定 n , 对 m 进行归纳.

对于 $m = 0$, 有

$$a^n a^0 = a^n e = a^n = a^{n+0}.$$

假设 $a^n a^m = a^{n+m}$ 成立, 考虑 $m + 1$ 的情况, 则

$$a^n a^{m+1} = a^n (a^m a) = (a^n a^m) a = a^{n+m} a = a^{n+m+1}.$$

- 然后考虑 n 或 m 中存在负数的情况. 假设 $n < 0, m \geq 0$, 令 $n = -t, t \in \mathbf{Z}^+$, 则

$$a^n a^m = a^{-t} a^m = (a^{-1})^t a^m = \begin{cases} (a^{-1})^{t-m} (a^{-1})^m a^m = a^{m-t} = a^{n+m}, & t \geq m; \\ (a^{-1})^t a^t a^{m-t} = a^{m-t} = a^{n+m}, & t < m. \end{cases}$$

对于 $n < 0, m < 0$ 或 $n \geq 0, m < 0$ 的情况类似可证. 同理可证(4).



群的基本性质

定理 6.2

G 为群, $\forall a, b \in G$, 方程 $ax = b$ 和 $ya = b$ 在 G 中有解, 且有惟一解.

证明 $\forall a, b \in G$ 有

$$a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = b,$$

所以 $a^{-1}b$ 是方程 $ax = b$ 的一个解.

然后证明唯一性. 假设 c 是方程 $ax = b$ 的任一解, 则

$$c = ec = (a^{-1}a)c = a^{-1}(ac) = a^{-1}b.$$

$ya = b$ 也可通过类似方法证明.



群的基本性质

例 6.6 $G = \langle P(S), \oplus \rangle$, 其中 $S = \{1, 2, 3\}$, \oplus 为集合的对称差运算. 求方程 $\{1, 2\} \oplus x = \{1, 3\}$ 和方程 $y \oplus \{1\} = \{2\}$ 的解.

解

$$x = \{1, 2\}^{-1} \oplus \{1, 3\} = \{1, 2\} \oplus \{1, 3\} = \{2, 3\};$$

$$y = \{2\} \oplus \{1\}^{-1} = \{2\} \oplus \{1\} = \{1, 2\}.$$



群的基本性质

定理 6.3

群中运算满足消去律, 即

$$ab = ac \Rightarrow b = c \text{ (左消去律),}$$

$$ba = ca \Rightarrow b = c \text{ (右消去律).}$$

证明 $\forall a, b, c \in G,$

$$ab = ac,$$

$$\Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac),$$

$$\Rightarrow (a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c,$$

$$\Rightarrow b = c.$$

同理可证右消去律.



群的基本性质

定理 6.4 (1)

G 是群, $a \in G$, $k \in \mathbf{Z}$, 且 $|a| = r$, 则 $a^k = e$ 当且仅当 $r|k$.

证明

- 必要性. 根据除法可构造 $p, q \in \mathbf{Z}$, $0 \leq q \leq r - 1$, 使得 $k = pr + q$. 因为 $a^k = e$, 所以有

$$e = a^k = a^{pr+q} = (a^r)^p a^q = a^q.$$

a 的阶是 r , 且 $q < r$, 根据阶的定义可得 $q = 0$, 这就证明了 $r|k$.

- 充分性. 已知 $r|k$, 即存在整数 s , 使得 $k = rs$. 所以有

$$a^k = a^{rs} = (a^r)^s = e^s = e.$$



群的基本性质

定理 6.4 (2)

G 是群, $a \in G$ 且 $|a| = r$, 则 $|a| = |a^{-1}|$.

证明

令 $|a^{-1}| = t$.

■ 一方面, 由 $(a^{-1})^r = a^{-r} = (a^r)^{-1} = e$. 由(1)可得 $t|r$.

■ 另一方面, $a^t = ((a^{-1})^t)^{-1} = e^{-1} = e$, 由(1)可得 $r|t$.

这就证明了 $r = t$, 即 $|a| = |a^{-1}|$.



定义6.3

- (1) 设 G 是群, H 是 G 的非空子集, 若 H 关于 G 中的运算**构成群**, 则称 H 为 G 的**子群**, 记作 $H \leq G$.
- (2) 如果子群 H 是 G 的真子集, 则称 H 为 G 的**真子群**, 记作 $H < G$.
- (3) 若 $H = \{e\}$ 或 $H = G$, 则称 H 是 G 的**平凡子群**.

例 $\langle \mathbf{Z}, + \rangle$ 是 $\langle \mathbf{Q}, + \rangle$, $\langle \mathbf{R}, + \rangle$ 的真子群, $\langle \mathbf{Q}, + \rangle$ 是 $\langle \mathbf{R}, + \rangle$ 的真子群.
 $\langle \{0\}, + \rangle$ 和 $\langle \mathbf{R}, + \rangle$ 都是 $\langle \mathbf{R}, + \rangle$ 的平凡子群.



子群判定定理

定理 6.5 (子群判定定理)

G 是群, H 是 G 的非空子集, 则 $H \leq G$ 当且仅当 $\forall a, b \in H$ 有 $ab^{-1} \in H$.

证明 必要性. 由子群的每一元素存在逆元和二元运算的封闭性得证.

充分性, 即证明 H 是群 (二元运算的封闭性, 有逆元, 有单位元).

- **有单位元**: 由 H 非空必存在 $x \in H$. 根据充分条件, 则有 $xx^{-1} \in H$, 即 $e \in H$.
- **有逆元**: 任取 $a \in H$, 由 $e, a \in H$, 再根据充分条件, 得 $ea^{-1} = a^{-1} \in H$.
- **二元运算的封闭性**: 任取 $a, b \in H$, 根据上面的证明有 $b^{-1} \in H$. 再根据充分条件, 有 $a(b^{-1})^{-1} \in H$, 即 $ab \in H$.

由于 H 显然满足结合律, 所以 H 是 G 的子群.

- 通过子群判定定理来证明 $H \leq G$ 的步骤为: (1) 证明 H 非空; (2) 证明 $\forall a, b \in H$ 有 $ab^{-1} \in H$.



子群

例 6.9 G 是群, $a \in G$, 令

$$\langle a \rangle = \{a^k \mid k \in \mathbf{Z}\},$$

k 是整数, 可以为负

则 $\langle a \rangle$ 是 G 的子群, 称为由 a 生成的子群.

证明 $a \in \langle a \rangle$, 所以 $\langle a \rangle$ 是 G 的非空子集.

任取 $a^i, a^j \in \langle a \rangle$, $i, j \in \mathbf{Z}$, 有

$$a^i (a^j)^{-1} = a^i a^{-j} = a^{i-j} \in \langle a \rangle.$$

由子群判定定理得 $\langle a \rangle \leq G$.



子群

例

- $G = \langle \mathbf{Z}, + \rangle$ 由2生成的子群 $\langle 2 \rangle$ 包含2的所有的倍数, 即
$$\langle 2 \rangle = 2\mathbf{Z} = \{2k \mid k \in \mathbf{Z}\}.$$

- $G = \langle \mathbf{Z}_6, \oplus \rangle$, 则

$$\langle 1 \rangle = \langle 5 \rangle = \mathbf{Z}_6 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\},$$

$$\langle 2 \rangle = \langle 4 \rangle = \{0, 2, 4\},$$

$$\langle 3 \rangle = \{0, 3\},$$

$$\langle 0 \rangle = \{0\}.$$

- Klein四元群 $G = \{e, a, b, c\}$, 它的元素生成的子群为:

$$\langle e \rangle = \{e\}, \quad \langle a \rangle = \{e, a\}, \quad \langle b \rangle = \{e, b\}, \quad \langle c \rangle = \{e, c\}.$$



子群

例 6.10 设 G 是群, 令 C 是与 G 中所有元素都可交换的元素构成的集合, 即

$$C = \{a \mid a \in G \text{ 且 } \forall x \in G, xa = ax\},$$

则 C 是 G 的子群, 叫做 G 的**中心**.

证明 $\forall x \in G, ex = xe$, 显然 $e \in C$, 且 C 非空.

$\forall a, b \in C$, 为了使用判定定理证明 $C \leq G$, 只需证明 $\forall x \in G, ab^{-1}$ 与 x 可交换.

$$\begin{aligned} (ab^{-1})x &= ab^{-1}x && \boxed{b \text{ 可交换}} \\ &= a(x^{-1}b)^{-1} = a(bx^{-1})^{-1} = a(xb^{-1}) \\ &= (ax)b^{-1} = (xa)b^{-1} = x(ab^{-1}). \end{aligned}$$

所以 $ab^{-1} \in C$. 由判定定理有 $C \leq G$.

- 群 G 的中心有大小, 有的群的中心只含有一个单位元 e , 而有的群的中心就是群 G , 如Abel群.



子群

例 6.11 (1) G 是群, H 和 K 是 G 的子群, 则 $H \cap K \leq G$.

证明 因为 H 和 K 都是 G 的子群, 所以 $e \in H \cap K$, 且 $H \cap K$ 非空.

任取 $a, b \in H \cap K$, 则 $a, b \in H, a, b \in K$.

又由于 H 和 K 是 G 的子群, 所以 $b^{-1} \in H, b^{-1} \in K$.

这就得到 $ab^{-1} \in H$ 和 $ab^{-1} \in K$, 即 $ab^{-1} \in H \cap K$.

由判定定理有 $H \cap K \leq G$.



例 6.13 (2) G 是群, H 和 K 是 G 的子群, 则 $H \cup K \leq G$ 当且仅当 $H \subseteq K$ 或 $K \subseteq H$.

证明 充分性显然, 充分条件成立时, $H \cup K = H$ 或 $H \cup K = K$.

必要性通过反证法, 假设 $H \not\subseteq K$ 且 $K \not\subseteq H$,

则存在 $h \in H$ 且 $h \notin K$, 同时存在 $k \in K$ 且 $k \notin H$.

可得 $hk \notin H$, 否则 $k = h^{-1}(hk) \in H$, 产生矛盾. 同理 $hk \notin K$.

因此 $hk \notin H \cup K$, 但是 $h, k \in H \cup K$, 与 $H \cup K \leq G$ 矛盾.



子群

- 由上例可知, 子群的并集不一定是子群.
- 对于子群 H 和 K , 为了得到包含 H 和 K 的最小的子群, 往往需要在 $H \cup K$ 中添加一些 G 中的其他元素, 以使得 $H \cup K$ 对于 G 中的运算封闭.
- 类似的例子是满足传递性的关系的并集.

例 Klein四元群 G 有子群 $\langle a \rangle$ 和 $\langle b \rangle$, 那么 $\langle a \rangle \cup \langle b \rangle = \{a, b, e\}$, 这不是 G 的子群, 因为 $ab = c$, c 不在这个集合中.

为了满足封闭性, 必须把 c 加进去, 因此包含 $\langle a \rangle$ 和 $\langle b \rangle$ 的最小的子群就是 G 自身.



子群格

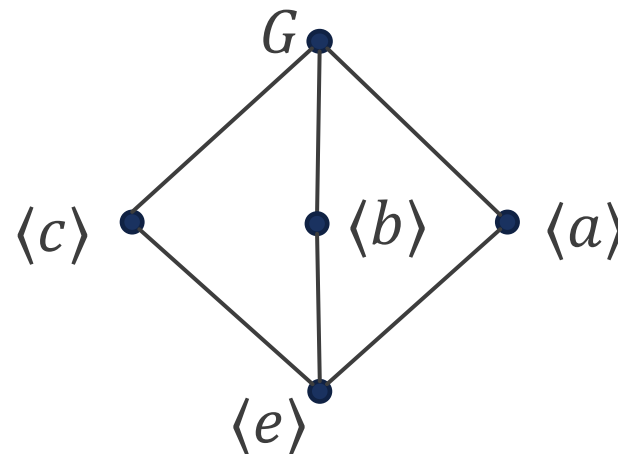
定义

设 G 是群, 令 $S = \{H \mid H \leq G\}$, 在 S 上定义偏序关系,

$$\forall A, B \in S, A \leq B \Leftrightarrow A \text{ 是 } B \text{ 的子群.}$$

那么 (S, \leq) 构成偏序集, 称为群 G 的**子群格**.

例 $G = \{e, a, b, c\}$ 是Klein四元群, G 的子群是 $\langle e \rangle = \{e\}$, $\langle a \rangle = \{e, a\}$, $\langle b \rangle = \{e, b\}$, $\langle c \rangle = \{e, c\}$ 和 G . 子群格如图所示.



子群格

例 $G = \langle \mathbf{Z}_{12}, \oplus \rangle$ 为模12加群, G 有6个子群:

$$H_1 = \{0\} = \langle 0 \rangle,$$

$$H_2 = \{0, 6\} = \langle 6 \rangle,$$

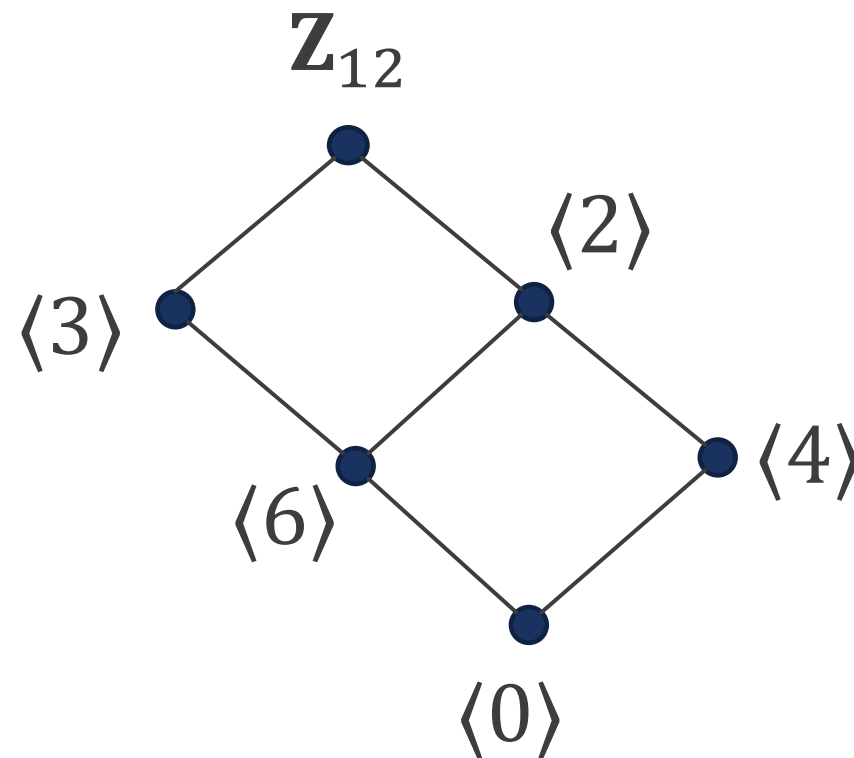
$$H_3 = \{0, 4, 8\} = \langle 4 \rangle = \langle 8 \rangle,$$

$$H_4 = \{0, 3, 6, 9\} = \langle 3 \rangle = \langle 9 \rangle,$$

$$H_5 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\} = \langle 2 \rangle = \langle 10 \rangle,$$

$$\begin{aligned} G = \mathbf{Z}_{12} &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\} \\ &= \langle 1 \rangle = \langle 5 \rangle = \langle 7 \rangle = \langle 11 \rangle. \end{aligned}$$

- G 的子群格如图所示.
- a 和逆元 $12 - a$ 必在同一子群, $\langle a \rangle = \langle 12 - a \rangle$.



循环群

定义 6.4

- (1) 设 G 是群, 若存在 $a \in G$ 使得 G 和它由 a 的生成子群相等, 即 $G = \langle a \rangle$, 则称 G 为循环群, 称 a 是 G 的生成元.
- (2) 在循环群 $\langle a \rangle$ 中, 若 $|a| = n$, 且 $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots, a^{n-1}\}$ 中都是不等的元素, 叫做有限循环群或 n 阶循环群.
- (3) 若 $|a|$ 不存在, 则 $\langle a \rangle = \{e, a, a^2, \dots\}$ 是无限的, 则称为无限循环群.

■ 判断 a 是否是 G 的生成元就是判断 a^k 是否涵盖所有 G 里的元素.

例 整数加群 $\langle \mathbf{Z}, + \rangle$ 是无限阶循环群, 1是它的一个生成元;

模 n 加群 $\langle \mathbf{Z}_n, \oplus \rangle$ 是 n 阶循环群, 1也是它的一个生成元.



循环群

- 对于循环群, 一个重要问题是**它有几个生成元? 有哪些生成元?**

定义

设 n 是正整数, **欧拉函数** $\varphi(n)$ 是小于等于 n 且与 n 互质的正整数的个数.

例 $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 1, \varphi(3) = 2, \varphi(4) = 2, \varphi(5) = 4, \varphi(6) = 2.$

例 $n = 12$, 小于等于12且与12互质的正整数是1, 5, 7和11, 因此 $\varphi(12) = 4.$

- 若 p 是素数, 则 $\varphi(p) = p - 1.$

循环群的生成元

定理 6.6

设 $G = \langle a \rangle$ 是循环群,

- (1) 若 G 是无限阶循环群, 则 G 只有两个生成元 a 和 a^{-1} .
- (2) 若 G 是 n 阶循环群, 则 G 有 $\varphi(n)$ 个生成元, 对于每个小于等于 n 且与 n 互质的正整数 r , a^r 都是 G 的生成元.

例 6.13 (1) $G = \langle a^2 \rangle$ 是无限循环群, 其生成元为 a^2, a^{-2} .

(2) 模 20 加群 $G = \langle \mathbf{Z}_{20}, \oplus \rangle$ 是有限循环群, 小于 20 且与 20 互质的正整数为 1, 3, 7, 9, 11, 13, 17, 19, 根据定理, 这些都是生成元.



循环群的子群

定理 6.7 设 $G = \langle a \rangle$ 是循环群, 那么

- (1) G 的子群也是循环群;
- (2) 若 G 是无限循环群, 则 G 的子群除 $\{e\}$ 外都是无限阶的;
- (3) 若 G 是 n 阶循环群, 那么对于 n 的每个正因子 d , G 有一个 d 阶循环子群.

- 定理6.7(3)说明对于 n 的每个正因子 d , n 阶循环群 G 有且仅有一个 d 阶子群, 但是没有说明 G 是否还有其他阶的子群.
- Lagrange 定理回答了这个问题, 对于 n 阶群 G , **G 的子群的阶和 G 中元素的阶都是 n 的因子.**
- 因此, 对于 n 阶循环群 G , 只要找出 n 的所有正因子, 就可以求出 G 的所有子群.



例 6.14 (1) 求无限循环群 $G = \langle a \rangle$ 的所有的子群.

解 G 有无数个子群, 分别为:

$$\langle e \rangle = \{e\},$$

$$\langle a \rangle = \langle a^{-1} \rangle = \langle a^k \mid k \in \mathbf{Z} \rangle = G,$$

$$\langle a^2 \rangle = \langle a^{-2} \rangle = \{e, a^{\pm 2}, a^{\pm 4}, a^{\pm 6}, \dots\}$$

$$\langle a^3 \rangle = \langle a^{-3} \rangle = \{e, a^{\pm 3}, a^{\pm 4}, a^{\pm 6}, \dots\}$$



循环群

例 6.14 (2) 求12阶循环群 $G = \langle a \rangle$ 的所有生成元和子群.

解 $\varphi(12) = 4$, 因此 G 有4个生成元, 分别是 $\{a, a^5, a^7, a^{11}\}$. 12的正因子为1, 2, 3, 4, 6, 12, 因此 G 有6个子群:

$$\langle a^1 \rangle = \langle a \rangle = \langle a^k \mid k \in \mathbf{Z} \rangle = G,$$

$$\langle a^2 \rangle = \{e, a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10}\},$$

$$\langle a^3 \rangle = \{e, a^3, a^6, a^9\},$$

$$\langle a^4 \rangle = \{e, a^4, a^8\},$$

$$\langle a^6 \rangle = \{e, a^6\},$$

$$\langle a^{12} \rangle = \langle e \rangle = \{e\}.$$

- 那么负次幂元素生成的子群, 例如 $\langle a^{-2} \rangle$, 以及非正因子生成的子群, 例如 $\langle a^{10} \rangle$ 是什么呢?



循环群

- 由于 $G = \langle a \rangle$ 是12阶有限循环群, $a^{12} = e$.
$$\langle a^{-2} \rangle = \langle a^{-2}e \rangle = \langle a^{-2}a^{12} \rangle = \langle a^{10} \rangle.$$
- 根据生成的子群的定义:
$$\begin{aligned} \langle a^{10} \rangle &= \{a^{20} = a^8, a^{18} = a^6, a^{16} = a^4, a^{14} = a^2, a^{12} = e, a^{10}\} \\ &= \{e, a^2, a^4, a^6, a^8, a^{10}\} = \langle a^2 \rangle. \end{aligned}$$
- 以此类推可得 $\langle a^{10} \rangle = \langle a^2 \rangle$, $\langle a^9 \rangle = \langle a^3 \rangle$, $\langle a^8 \rangle = \langle a^4 \rangle$, $\langle a \rangle = \langle a^{11} \rangle$.
- 那么剩下的 $\langle a^5 \rangle$ 和 $\langle a^7 \rangle$ 呢?



循环群生成元和子群的个数

- 对于无限阶循环群 G :
 - 生成元的个数 = 2.
 - 子群的个数 = 无限.
- 对于 n 阶循环群 G :
 - 生成元的个数 = $\varphi(n)$, 小于等于 n 且与 n 互质的正整数的个数.
 - 子群的个数 = 正因子的个数, 一个子群的阶对应一个正因子.



课堂练习

求模15加群 $G = \langle \mathbf{Z}_{15}, \oplus \rangle$ 的所有生成元和子群, 并画出 G 的子群格.



课堂练习

求模15加群 $G = \langle \mathbf{Z}_{15}, \oplus \rangle$ 的所有生成元和子群, 并画出 G 的子群格.

解 与15互质的正整数为1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14, 这些都是生成元.

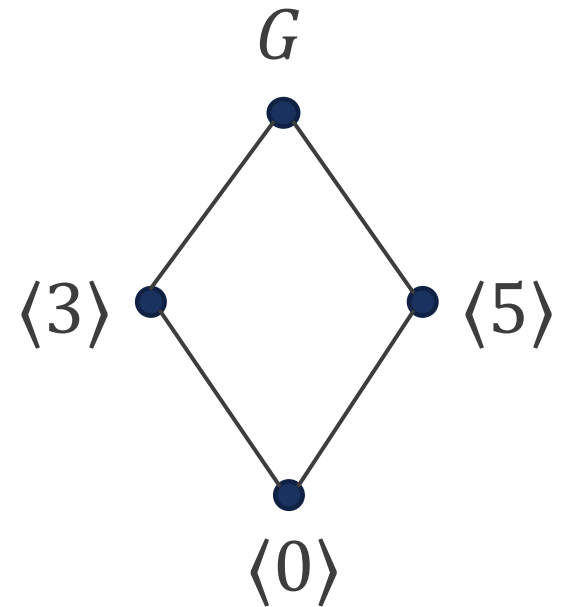
G 是阶是15, 正因子为1, 3, 5, 15. 所以 G 有4个子群:

$$\langle 0 \rangle = \{0\},$$

$$\langle 1 \rangle = G,$$

$$\langle 3 \rangle = \{0, 3, 6, 9, 12\},$$

$$\langle 5 \rangle = \{0, 5, 10\}.$$



置换

定义 6.5

设 $N = \{1, 2, \dots, n\}$, 如果 $\sigma: N \rightarrow N$ 是双射函数, 则称 σ 为 N 上的 n 元置换. n 元置换通常采用置换符号表示, 即

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

- 易见 $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$ 恰为 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的一个排列, 其本质是一个双射函数: $\{\langle 1, \sigma(1) \rangle, \langle 2, \sigma(2) \rangle, \dots, \langle n, \sigma(n) \rangle\}$.
- N 上的所有置换和 N 的所有排列之间存在着一一对应.
- 当 $|N| = n$ 时, n 元集有 $n!$ 个排列, 所以有 $n!$ 个 n 元置换.
- 所有这些置换的集合记作 S_n .



置换

例 $S_3 = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6\}$, 其中

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \\ \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$



轮换

- n 元置换还可以用轮换来表示, 这种表示方法更为简洁.

定义 6.6

设 σ 是 n 元置换, 如果

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{k-1}) = i_k, \sigma(i_k) = i_1,$$

并且保持 N 中的其它元素不变, 则称 σ 是 k 阶轮换, 记作

$$\sigma = (i_1 i_2 \dots i_k).$$

- 由定义: 在上述轮换中, 不论用哪个文字作为起始文字, 只要文字的顺序不变, 它们都代表同一个轮换.

$$(1\ 3\ 6\ 4\ 2) = (3\ 6\ 4\ 2\ 1) = (6\ 4\ 2\ 1\ 3) = (4\ 2\ 1\ 3\ 6) = (2\ 1\ 3\ 6\ 4)$$



轮换

例 S_3 的6个置换如果采用轮换表示, 则有

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1)(2)(3), \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 3)(1),$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 2)(3), \quad \sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3)(2),$$

$$\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3), \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 2).$$

1阶轮换在表示时可以省略, 但是如果分解式中全都是1阶轮换, 则需要保留一个.

$$S_3 = \{(1), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

定义

设 $\sigma_1 = (i_1 i_2 \dots i_k)$ 和 $\sigma_2 = (j_1 j_2 \dots j_s)$ 是两个轮换. 若 $\{i_1 i_2 \dots i_k\} \cap \{j_1 j_2 \dots j_s\} = \emptyset$, 则称 σ_1 与 σ_2 是不相交的.



轮换

例 6.15 设 σ, τ 是8元置换, 且

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 1 & 4 & 7 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

写出 σ 和 τ 的不相交轮换表示.

解 先从 σ 中取出1, $\sigma(1) = 5, \sigma(5) = 7, \sigma(7) = 2, \sigma(2) = 6, \sigma(6) = 3, \sigma(3) = 1$, 这就得到第一个轮换 $(1\ 5\ 7\ 2\ 6\ 3)$.

然后从剩下的元素中取出4, $\sigma(4) = 4$, 再取出8, $\sigma(8) = 8$.

由于 $\sigma(4) = 4$ 和 $\sigma(8) = 8$ 都是在 σ 作用下保持不变的文字, 即1阶轮换, 可以省略, 因此可写成 $\sigma = (1\ 5\ 7\ 2\ 6\ 3)$.

同理可得 $\tau = (1\ 2\ 3\ 7\ 8)(4\ 5\ 6)$.



轮换

- $(1\ 2\ 3\ 7\ 8)(4\ 5\ 6)$ 称为**轮换之积**, 是两个轮换经过**右复合运算**后得到的结果.
- 任何 n 元置换在分解成不交的轮换之积时, 分解式是唯一的.

定理

设 $\sigma, \tau \in S_n$, 若 σ 与 τ 是不相交的, 则 $\sigma\tau = \tau\sigma$.

例 在 S_5 中, $\sigma = (134)$, $\tau = (25)$ 是不相交的.

例 在 S_5 中,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$(5\ 2\ 3)(1\ 4)$ 和 $(1\ 4)(5\ 2\ 3)$ 都是同一个轮换.



课堂练习

设 σ, τ 是8元置换, 且

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 1 & 4 & 7 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 给出 σ, τ 的轮换表示.

(2) 求 σ 与 τ 之积 $\sigma\tau$.



课堂练习

设 σ, τ 是8元置换, 且

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 1 & 4 & 7 & 3 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) 给出 σ, τ 的轮换表示.

(2) 求 σ 与 τ 之积 $\sigma\tau$.

解

(1) $\sigma = (1\ 5\ 7\ 2\ 6\ 3), \tau = (1\ 2\ 3\ 7\ 8)(4\ 5\ 6)$.

(2) $\sigma\tau = (1\ 6\ 7\ 3\ 2\ 4\ 5\ 8)$.



置换群

定义

设 σ 与 τ 是 n 元置换, 由于 n 元运算是从 N 到 N 的双射函数, 经过右复合运算后所得结果仍是 N 到 N 的双射函数, 称这个右复合运算为**置换乘法**, 所得结果为 σ, τ 之**积**, 记作 $\sigma\tau$.

- N 上的恒等置换(1)是置换乘法运算的单位元.
- 每个 n 元置换的逆都存在, 因为双射函数有反函数, 其依然是 N 上的双射函数.
- n 元置换的乘法在 S_n 上是封闭的, 并且满足交换律, 即 $\sigma\tau = \tau\sigma$.
- 封闭的, 满足结合律, 有单位元, 每个元素都有逆元, 因此 S_n 关于置换的乘法构成一个群, 称为 **n 元对称群**. S_n 的子群称为 **n 元置换群**.



置换群

例 6.17 $S_3 = \{(1), (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$, 那么3元对称群的运算表如下:

| 置换乘法 | (1) | (1 2) | (1 3) | (2 3) | (1 2 3) | (1 3 2) |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| (1) | (1) | (1 2) | (1 3) | (2 3) | (1 2 3) | (1 3 2) |
| (1 2) | (1 2) | (1) | (1 2 3) | (1 3 2) | (1 3) | (2 3) |
| (1 3) | (1 3) | (1 3 2) | (1) | (1 2 3) | (2 3) | (1 2) |
| (2 3) | (2 3) | (1 2 3) | (1 3 2) | (1) | (1 2) | (1 3) |
| (1 2 3) | (1 2 3) | (2 3) | (1 2) | (1 3) | (1 3 2) | (1) |
| (1 3 2) | (1 3 2) | (1 3) | (2 3) | (1 2) | (1) | (1 2 3) |

置换群

- 因此, S_3 的6个子群列出如下:
 - 1阶子群: $\{(1)\}$,
 - 2阶子群: $\{(1), (1\ 2)\}$, $\{(1), (1\ 3)\}$, $\{(1), (2\ 3)\}$,
 - 3阶子群: $\{(1), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$,
 - 6阶子群: S_3 .
- 它们都是3元置换群.

对称群有生成元吗?



环

- 半群, 独异点和群是只有一个二元运算的代数系统.
- 环和域是具有两个二元运算的代数系统.

定义 6.7

设 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 是具有两个二元运算的代数系统, 如果:

- (1) $\langle R, + \rangle$ 构成Abel群,
- (2) $\langle R, \cdot \rangle$ 构成半群,
- (3) \cdot 对 $+$ 满足分配律,

则称 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 是**环**, 并称 $+$ 和 \cdot 分别为 R 中的**加法**和**乘法**.

- 环只对 $+$ 是群, 对 \cdot 不是群.
- 分配律把两个二元运算联系在一起.
- 乘法运算符 \cdot 通常可省略, 例如 $a \cdot b$ 可写作 ab .



环

例6.18 (1) \mathbf{Z} , \mathbf{Q} , \mathbf{R} , \mathbf{C} 关于普通数的加法 $+$ 和乘法 \times 都构成环, 分别称为整数环, 有理数环, 实数环, 复数环.

(2) 设 $n \geq 2$, 设 $M_n(\mathbf{R})$ 是 n 阶实矩阵的集合, 则 $M_n(\mathbf{R})$ 关于矩阵的加法和乘法构成环, 称为 n 阶实矩阵环.

(3) $\langle \mathbf{Z}_n, \oplus, \otimes \rangle$ 构成一个环, 称为模 n 整数环, 其中 $\mathbf{Z}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$, \oplus 和 \otimes 分别表示模 n 加法和模 n 乘法:

$$x \oplus y = (x + y) \bmod n,$$

$$x \otimes y = (xy) \bmod n.$$

(4) $\langle P(B), \oplus, \cap \rangle$ 构成一个环, 其中 \oplus 是集合的对称差运算. 但是 $\langle P(B), \oplus, \cup \rangle$ 不构成一个环, 因为 \cup 运算对 \oplus 运算不分配.



为了叙述方便, 作出以下定义.

- 环中加法的单位元记作 0 , 元素 x 关于加法的逆元称为 x 的负元, 记作 $-x$.
- 如果环中乘法有单位元, 记作 1 . 如果 x 关于乘法存在逆元, 记作 x^{-1} .
- 类似地, 可以用 $x - y$ 表示 $x + (-y)$.



域

定义

考虑环中两个元素 a 和 b , $a \neq 0$, $b \neq 0$, 但是 $ab = 0$, 则称 a 和 b 分别为环中的左零因子和右零因子.

定义 6.8

设 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 是环,

(1) 若 R 中乘法适合交换律, 则称 R 是交换环.

(2) 若 R 中存在乘法的单位元, 则称 R 是含幺环.

(3) 若 $\forall a, b \in R, ab = 0 \Rightarrow a = 0$ 或 $b = 0$, 则称 R 是无零因子环.

■ (3)的等价定义为: 设 R 是一个是环, 如果 R 中任意非0元素 a 和 b , 都有 $ab \neq 0$, 则称 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 是无零因子环.

例 在模6的整数环 $\langle \mathbf{Z}_6, \oplus, \otimes \rangle$ 中, $2 \otimes 3 = 0$, 但是2和3都不是0, 因此它们是零因子. 这个环含有零因子, 不是无零因子环.



定义 6.8

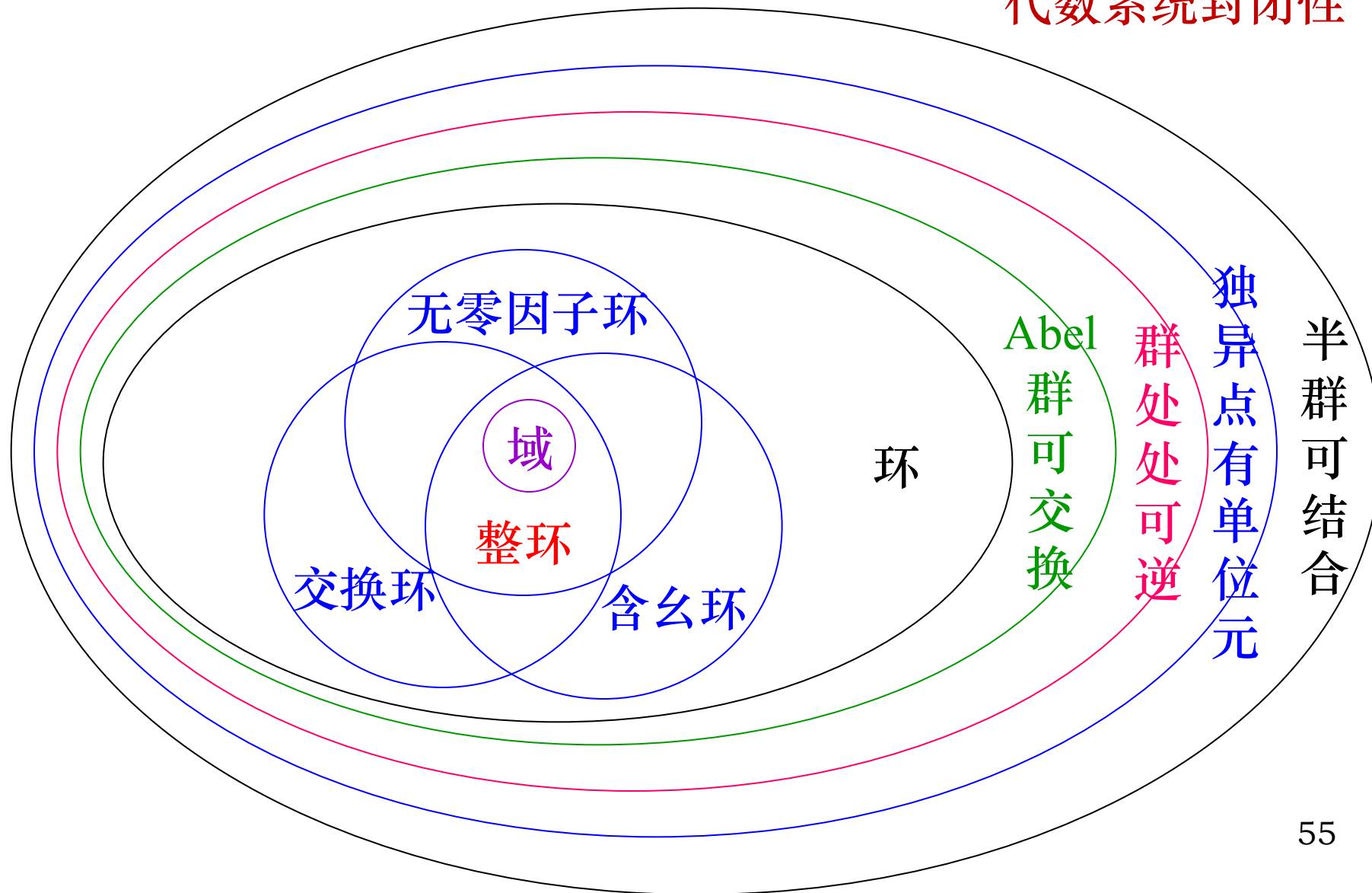
设 $\langle R, +, \cdot \rangle$ 是环,

(4) 若 R 是交换的含幺的无零因子环, 则称 R 是**整环**;

(5) 若 R 是整环, R 至少含有两个元素, 且 $\forall a \in R^* = R - \{0\}$, 都有 $a^{-1} \in R$, 则称 R 是**域**.



代数系统封闭性



例 6.19 (1) 整数环, 有理数环, 实数环中的乘法适合交换律, 含有单位元 1, 不含零因子, 因此它们都是交换环, 含么环, 无零因子环和整环.

其中有理数环, 实数环也是域, 因为 $a(a \neq 0)$ 存在乘法逆元, 就是它的倒数 $1/a$.

但是整数环不是域, 因为很多整数的倒数不再是整数.

(2) 模 n 整数环 $\langle \mathbf{Z}_n, \oplus, \otimes \rangle$ 是交换环, 含么环. 当 n 为素数时可以证明 \mathbf{Z}_n 构成域; 当 n 为合数时不构成整环和域.

例如合数 $n = pq$, p 和 q 是大于 1 的整数, 那么 $p \otimes q = 0$, p 和 q 是零因子.

例6.24 (3) 设 $n \geq 2$, n 阶实矩阵环 $\langle M_n(\mathbf{R}), +, \cdot \rangle$ 不是交换环, 因为矩阵乘法不可交换.

但它是含幺环, 单位矩阵是乘法的单位元.

它不是无零因子环, 因为存在两个非零矩阵相乘为零矩阵的情况, 这样的非零矩阵分别为左零因子和右零因子. 因此它也不是整环和域.



例 6.29 判断下述集合关于数的加法和乘法是否构成环, 整环和域.

(1) $A = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\};$

(2) $A = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Q}\};$

(3) $A = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbf{Z}\};$

(4) $A = \{a + bi \mid a, b \in \mathbf{Z}, i^2 = -1\}.$

解 (1) 是环和整环, 但不是域, 因为 $\sqrt{2}$ 对于乘法没有逆元.

(2) 是环, 整环和域.

(3) 不是环, 因为 A 关于乘法不封闭.

(4) 是环和整环, 但不是域, 因为 $2i$ 对于乘法没有逆元. (但是 i 有逆元)



域

- 域是一类重要的代数系统, 一般常把域表示为 $\langle F, +, \cdot \rangle$.
- 域中的运算有着非常良好的性质. 其中 $\langle F, + \rangle$ 构成Abel群, $+$ 有交换律, 结合律, 单位元, 每个元素都有逆元;
- $\langle F, \cdot \rangle$ 也构成Abel群, \cdot 也有交换律, 结合律, 单位元, 除了零以外, 每个元素都有逆元.
- 此外, 乘法对加法还有分配律. 正由于这些良好的性质, 域有着广泛的应用. 特别是伽罗华域 $GF(p)$ 在密码学中是很重要的基础.



6.2 格与布尔代数

- 格和布尔代数是具有两个二元运算的代数系统，布尔代数是格的特例.
- 与前面讨论的代数系统之间存在着一个重要区别：格与布尔代数的载体都是偏序集.



上界与下界

定义4.26

设 $\langle A, \leq \rangle$ 为偏序集, $B \subseteq A, y \in A$.

(1) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow x \leq y)$ 成立, 则称 y 为 B 的**上界**.

(2) 若 $\forall x(x \in B \rightarrow y \leq x)$ 成立, 则称 y 为 B 的**下界**.

(3) 令 $C = \{y \mid y \text{ 是 } B \text{ 的上界}\}$, 则称 C 的最小元为 B 的**最小上界**或**上确界**.

(4) 令 $C = \{y \mid y \text{ 是 } B \text{ 的下界}\}$, 则称 C 的最大元为 B 的**最大下界**或**下确界**.

■ 当 B 中仅含一个元素时, $x \leq y$ 也可以直接看做 y 是 x 的上界, 或者 x 是 y 的下界.

格

定义 6.9

设 $\langle S, \leq \rangle$ 是偏序集, 若对于 $\forall x, y \in S$, $\{x, y\}$ 都有最小上界和最大下界, 则称 S 关于偏序 \leq 作成一个格.

设 x, y 是格中任意两个元素, 由于 $\{x, y\}$ 的最大下界和最小上界是惟一存在的, 将 $\{x, y\}$ 的最大下界记作 $x \wedge y$, 最小上界记作 $x \vee y$.

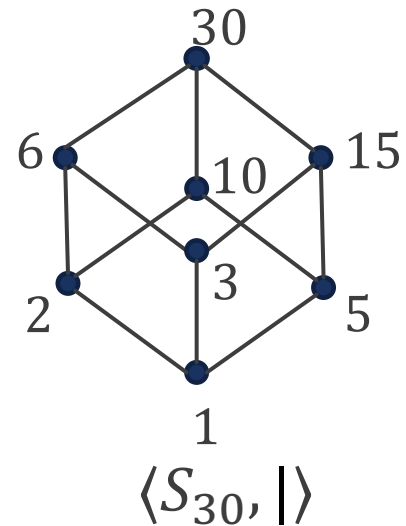
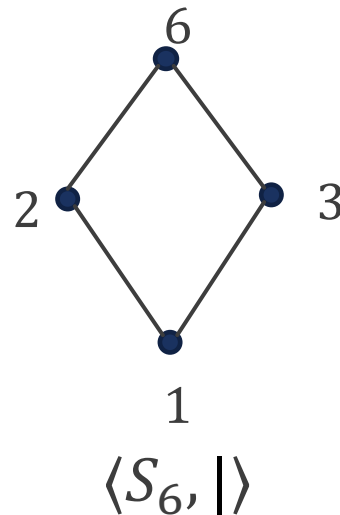
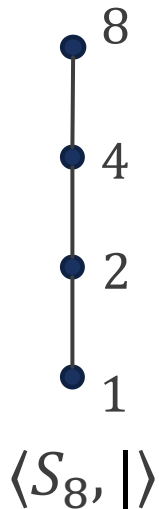
- 格是特殊的偏序集.
- 注意区分二元关系 \leq 和二元运算 \wedge, \vee .
 - $x \leq y$ 代表 $\langle x, y \rangle \in S$, 即 y 是 x 的上界, x 是 y 的下界, 是个命题. $x \wedge y$ 代表计算 x 和 y 的最大下界, 是个函数.
- 本章中的 \wedge 和 \vee 符号只代表格中求最大下界 (读作取小) 和最小上界 (读作取大) 的运算, 不再具有逻辑上的析取或合取的含义.

格

- 对给定的偏序集, 可以先画出哈斯图, 直接由哈斯图来判断它是否构成格, 即考虑任何两个元素是否有最小上界和最大下界同时存在.

例 6.20 设 $n \in \mathbf{Z}^+$, S_n 是 n 的正因子的集合, $|$ 为整除关系, 则 $\langle S_n, D \rangle$ 构成格.

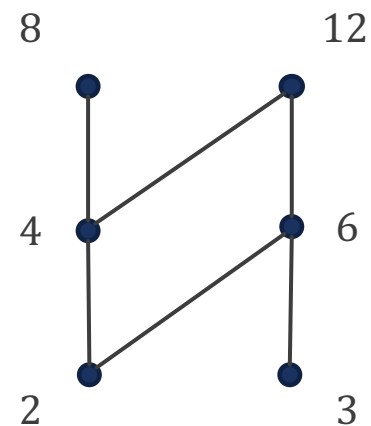
$\forall x, y \in S_n$, $x \vee y$ 是 x 与 y 的最小公倍数, $x \wedge y$ 是 x 与 y 的最大公约数. 下图给出了格 $\langle S_8, | \rangle$, $\langle S_6, | \rangle$ 和 $\langle S_{30}, | \rangle$.



格

例 $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$, \leq 是整除关系,
 A 不是格.

因为2和3没有最大下界, 8和12没有最小上界.



例 6.26 (1) $P(B)$ 是集合 B 的幂集, $\langle P(B), \subseteq \rangle$ 构成一个格, 称为幂集格.

因为 $\forall x, y \in P(B)$, 设 $x \vee y = x \cup y$, $x \wedge y = x \cap y$. 由于 \cup 和 \cap 运算在 $P(B)$ 上是封闭的, 所以 $x \cup y, x \cap y \in P(B)$.

(2) \leq 为小于等于关系, 则 $\langle \mathbf{Z}, \leq \rangle$ 是格.

因为 $\forall x, y \in \mathbf{Z}$, 设 $x \vee y = \max\{x, y\}$, $x \wedge y = \min\{x, y\}$, 它们都是整数.

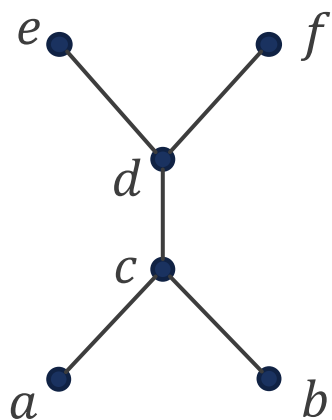
格

例 6.26 (3) 图中给出的偏序集都不是格.

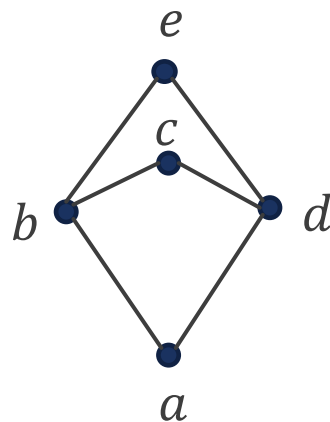
(A) 中的 $\{e, f\}$ 没有最小上界, $\{a, b\}$ 没有最大下界.

(B) 中的 $\{b, d\}$ 有上界 c 和 e , 但没有最小上界.

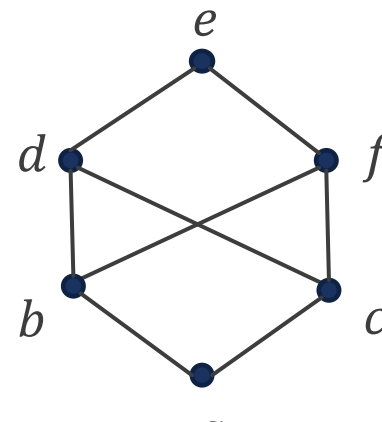
(C) 中的 $\{b, c\}$ 有三个上界 d, e 和 f , 但没有最小上界.



(A)



(B)



(C)



格

定义

设 $\langle S, \leq \rangle$ 是格, f 是由格中元素及 $\leq, =, \geq, \wedge, \vee$ 等符号所表示的公式, 如果将 f 中的 \leq 和 \geq 相互替换, \wedge 和 \vee 相互替换后得到的公式为 f^* . 称为 f 的**对偶式**, 简称**对偶**.

定理

根据格的对偶原理, 若 f 对一切格为真, 则 f^* 也对一切格为真.

例 若 f 是 $a \wedge b \leq a$, 那么 f 的对偶式 f^* 是 $a \vee b \geq a$.

若 f 是 $a \wedge (a \vee b) = a$, 那么 f 的对偶式 f^* 是 $a \vee (a \wedge b) = a$.



格中运算的性质

定理 6.8 (1)

设 $\langle L, \leq \rangle$ 为格, 则运算 \vee 和 \wedge 适合交换律, 即 $\forall a, b \in L$ 有

$$a \wedge b = b \wedge a, \quad a \vee b = b \vee a.$$

证明 $a \vee b$ 是 $\{a, b\}$ 的最小上界, $b \vee a$ 是 $\{b, a\}$ 的最小上界, 由于 $\{a, b\} = \{b, a\}$, 且最小上界是唯一的, 所以 $a \vee b = b \vee a$. 同理可证 $a \wedge b = b \wedge a$.



格中运算的性质

定理 6.8 (3)

设 $\langle L, \leq \rangle$ 为格, 则运算 \vee 和 \wedge 适合幂等律, $\forall a \in L$ 有

$$a \wedge a = a, \quad a \vee a = a.$$

证明

可以通过偏序关系的反对称性, 即

$$a \leq a \vee a \text{ 且 } a \vee a \leq a \Rightarrow a \vee a = a.$$

对 $a \vee a = a$ 进行证明. 因此, 只需证明 $a \leq a \vee a$ 且 $a \vee a \leq a$ 即可.

- 首先证明 $a \leq a \vee a$. $a \vee a$ 是 a 的最小上界, 也是 a 的上界, 因此 $a \leq a \vee a$.
- 再证明 $a \vee a \leq a$. 由偏序关系的自反性 $a \leq a$, 即 a 是自身的上界之一. $a \vee a$ 是所有 a 的上界中最小的, 所以可得 $a \vee a \leq a$.
- 根据偏序关系的反对称性可证 $a \vee a = a$. 同理可证 $a \wedge a = a$.



格中运算的性质

定理 6.8 (2)

设 $\langle L, \leq \rangle$ 为格, 则运算 \vee 和 \wedge 适合结合律, 即 $\forall a, b, c \in L$ 有

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c), \quad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c).$$

证明 通过反对称性证明. 由最小上界的定义有

$$(a \vee b) \vee c \geq a \vee b \geq a, \quad \textcircled{1}$$

$$(a \vee b) \vee c \geq a \vee b \geq b, \quad \textcircled{2}$$

$$(a \vee b) \vee c \geq c. \quad \textcircled{3}$$

由②和③可得, $(a \vee b) \vee c$ 是 $\{b, c\}$ 的上界, $\{b, c\}$ 的最小上界 $b \vee c$ 是所有上界中的最小元, 所以

$$(a \vee b) \vee c \geq b \vee c.$$

同理, 再根据①可得, $(a \vee b) \vee c$ 是 $\{a, b \vee c\}$ 的上界, 所以 $(a \vee b) \vee c \geq a \vee (b \vee c)$.

同理可证, $(a \vee b) \vee c \leq a \vee (b \vee c)$, 根据反对称性可得

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c).$$

再次同理可证 $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$.



格中运算的性质

定理 6.8 (4)

设 $\langle L, \leq \rangle$ 为格, 则运算 \vee 和 \wedge 适合吸收律, 即 $\forall a, b \in L$ 有

$$a \wedge (a \vee b) = a, \quad a \vee (a \wedge b) = a.$$

证明 通过反对称性证明.

- 先证明 $a \leq a \vee (a \wedge b)$. 由于 $a \vee (a \wedge b)$ 是 a 的最小上界, 也是 a 的上界, 可得

$$a \leq a \vee (a \wedge b).$$

- 再证明 $a \vee (a \wedge b) \leq a$. $a \wedge b$ 是 a 的最大下界, 也是 a 的下界, 可得

$$a \wedge b \leq a.$$

又由 $a \leq a$ 和 $a \wedge b \leq a$, 可得 a 是 $\{a, a \wedge b\}$ 的上界, 最小上界是上界中的最小元, 所以

$$a \vee (a \wedge b) \leq a.$$

- 根据反对称性可得 $a \vee (a \wedge b) = a$, 同理可证 $a \wedge (a \vee b) = a$.



格与代数系统

- 很明显, 格 L 与运算 \wedge 和 \vee 构成代数系统 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$. 定理6.8说明格中的运算 \wedge 和 \vee 遵从交换律, 结合律, 幂等律和吸收律.
 - 这个代数系统是先确定了偏序关系, 再定义二元运算的.
- 考虑一个相反的问题, 能不能像群和环一样, 通过规定集合, 集合上的运算及运算所遵从的算律来给出格作为代数系统的定义呢?
 - 也就是说, 有没有一个代数系统, 满足一些性质, 就成为了格?
- 回答是肯定的. 但是这样定义的格中的偏序关系是什么? 而这个通过偏序集定义的格所导出的代数系统和原来的代数系统有什么关系呢?



定理6.9

设 $\langle S, *, \circ \rangle$ 是具有两个二元运算的代数系统. 若 $*$ 和 \circ 运算适合交换律, 结合律和吸收律, 则可以适当定义 S 上的偏序关系 \leq , 使得 $\langle S, \leq \rangle$ 构成一个格, 且 $\langle S, \leq \rangle$ 导出的代数系统 $\langle S, \wedge, \vee \rangle$ 就是 $\langle S, *, \circ \rangle$.

- 也就是说, 只要一个代数系统 $\langle S, *, \circ \rangle$ 适合交换律, 结合律和吸收律, 那么就一定可以**构造出**偏序关系 \leq 和一个格 $\langle S, \leq \rangle$. $*$ 运算和 \circ 运算分别对应 \wedge 运算和 \vee 运算.



证明

已知代数系统 $\langle S, *, \circ \rangle$ 中的 $*$ 和 \circ 运算适合交换律, 结合律和吸收律, 要证明 $\langle S, *, \circ \rangle$ 可以通过某种构造的方式称为格, 需要三步:

1. 通过定义二元运算 $*$ 或 \circ 构造出一个二元关系 \leq .
2. 证明该二元关系 \leq 是偏序关系 (自反, 反对称, 传递).
3. 证明 $\langle S, \leq \rangle$ 构成格, 即该定义下的二元运算 $*$ 和 \circ 就是最大下界和最小上界.



证明

(1) 首先通过定义 \circ 运算来定义二元关系 \leq , $\forall a, b \in S$:

$$a \leq b \Leftrightarrow a \circ b = b.$$

下面依次通过自反性, 反对称性和传递性证明 \leq 是偏序关系.



格与代数系统

(2)证明该二元关系 \leq 是偏序关系 (自反, 反对称, 传递).

- 首先证明 \leq 在 S 上的自反性, 即 $a \leq a$. 通过定义可得等价证明 $a \circ a = a$, 即 \circ 适合幂等律.

$\forall a \in S$, 通过吸收律 $a = a * (a \circ b)$, 可得:

$$a = a * (a \circ a)$$

把 a 看做 b , $*$ 对 \circ 吸收

两边同时进行 \circ 运算后, 再次使用吸收律:

$$a \circ a = a \circ (a * (a \circ a)) = a.$$

把 $a \circ a$ 看做 b , \circ 对 $*$ 吸收

即 \leq 在 S 上是自反的. 同理可证 $a * a = a$.



格与代数系统

- 证明 \leq 在 S 上的反对称性. $\forall a, b \in S$, 有

$$a \leq b \text{ 且 } b \leq a$$

$$\Leftrightarrow a \circ b = b \text{ 且 } b \circ a = a$$

$$\Leftrightarrow b = a \circ b = b \circ a = a$$

(\leq 的定义)

(交换律)

通过反对称的定义, 可知 \leq 在 S 上是反对称的.

- 证明 \leq 在 S 上的传递性. $\forall a, b, c \in S$, 有

$$a \leq b \text{ 且 } b \leq c$$

$$\Leftrightarrow a \circ b = b \text{ 且 } b \circ c = c$$

$$\Leftrightarrow a \circ c = a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c = b \circ c = c$$

(\leq 的定义)

(结合律)

可得 $a \leq c$, 因此可知 \leq 在 S 上是传递的. 综上所述, \leq 为 S 的偏序关系.



(3) 最后一步, 证明 $\langle S, \leq \rangle$ 构成格, 即 $x \circ y$ 和 $x * y$ 运算分别对应最小上界和最大下界.

■ 首先证明 $a \circ b$ 是 $\{a, b\}$ 的上界, 即 $a \leq a \circ b$ 且 $b \leq a \circ b$.

$\forall a, b \in S$, 根据 \leq 的定义 $a \leq b \Leftrightarrow a \circ b = b$, 有

$$a \circ (a \circ b) = (a \circ a) \circ b = a \circ b \Rightarrow a \leq a \circ b \quad (\leq \text{的定义})$$

$$b \circ (a \circ b) = a \circ (b \circ b) = a \circ b \Rightarrow b \leq a \circ b \quad (\leq \text{的定义})$$

所以 $a \circ b$ 是 $\{a, b\}$ 的上界.



格与代数系统

- 然后证明 $a \circ b$ 是 $\{a, b\}$ 的最小上界, 即 $a \circ b \leq \{a, b\}$ 的任意其他上界.

假设 c 为 $\{a, b\}$ 的任一上界, 则有 $a \leq c$ 且 $b \leq c$, 可得

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) = a \circ c = c \Rightarrow a \circ b \leq c \quad (\leq \text{的定义})$$

所以 $a \circ b$ 是 $\{a, b\}$ 的最小上界, 即 $a \circ b = a \vee b$.

- 然后证明 $a * b$ 是 $\{a, b\}$ 的最大下界. 由 $a \circ b = b$ 可知

$$a * b = a * (a \circ b) = a \quad (\text{吸收律})$$

通过 $a * b = a$ 重复之前的步骤同理可证 $a * b$ 是 $\{a, b\}$ 的最大下界, 即 $a * b = a \wedge b$.



格与代数系统

- 根据定理6.12, 我们可以从代数系统的角度给出格的另一个等价定义.

定义 6.10

设 $\langle S, *, \circ \rangle$ 是代数系统, $*$ 和 \circ 是二元运算. 若 $*$ 和 \circ 满足交换律, 结合律和吸收律, 则称 $\langle S, *, \circ \rangle$ 构成一个格.

- 由定理, 偏序构成的格和代数系统构成的格是等价的.
- 格中的运算需要满足四条算律, 但是定义6.10中没有幂等律, 这是因为幂等律可以由吸收律推出, 所以只需满足三条算律即可.



- 子格就是格的子代数.

定义 6.11

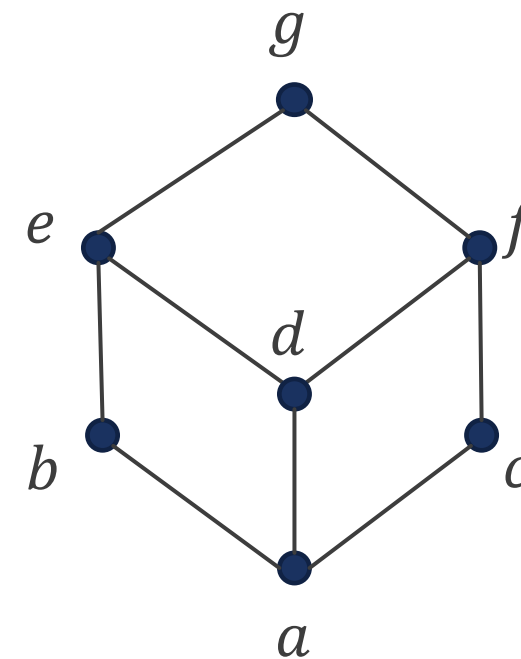
设 L 为格, S 是 L 的非空子集. 若 S 关于 L 中的 \wedge 和 \vee 运算是封闭的, 即 $\forall a, b \in S, a \wedge b \in S, a \vee b \in S$, 则称 S 是 L 的子格.

- 设 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 是格, $\forall a \in L, \langle \{a\}, \wedge, \vee \rangle$ 为格 L 的子格.
- 在格 L 的哈斯图中, 经传递边构成的两个元素的集合是格 L 的子格.

子格

例 6.22 考虑图中的7元格 L .

- 1元子格有7个: $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}, \{f\}, \{g\}$.
- 2元子格有15个: $\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{a, f\}, \{a, g\}, \{b, e\}, \{b, g\}, \{c, f\}, \{c, g\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{d, g\}, \{e, g\}, \{f, g\}$.
- 3元子格有13个: $\{a, b, e\}, \{a, b, g\}, \{a, d, e\}, \{a, d, f\}, \{a, d, g\}, \{a, c, f\}, \{a, c, g\}, \{a, e, g\}, \{a, f, g\}, \{b, e, g\}, \{c, f, g\}, \{d, e, g\}, \{d, f, g\}$.
- 4元子格有9个: $\{a, b, e, g\}, \{a, d, e, g\}, \{a, d, f, g\}, \{a, c, f, g\}, \{a, b, d, e\}, \{a, c, d, f\}, \{d, e, f, g\}, \{a, b, f, g\}, \{a, c, e, g\}$.
- 5元子格有5个: $\{a, b, d, e, g\}, \{a, c, d, f, g\}, \{a, d, e, f, g\}, \{a, b, c, f, g\}, \{a, b, c, e, g\}$.
- 6元子格有2个: $\{a, c, d, e, f, g\}, \{a, b, d, e, f, g\}$.
- 7元子格只有1个, 就是 L 本身. 其它非空子集都非子格.



$\{a, e, f, g\}$ 是格, 但不是 L 的子格, 因为 $e \wedge f = d$, 但是 $d \notin \{a, e, f, g\}$

课堂练习

$S_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $\langle S_{30}, | \rangle$ 是格吗?

$S = \{1, 2, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $\langle S, | \rangle$ 是格吗?

$\langle S, | \rangle$ 是 $\langle S_{30}, | \rangle$ 的子格吗?

画出 S_{30} 和 S 的哈斯图.



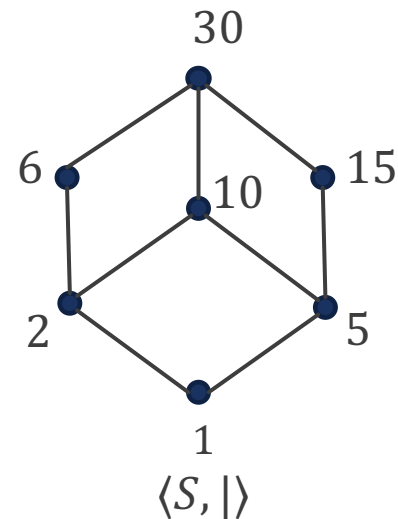
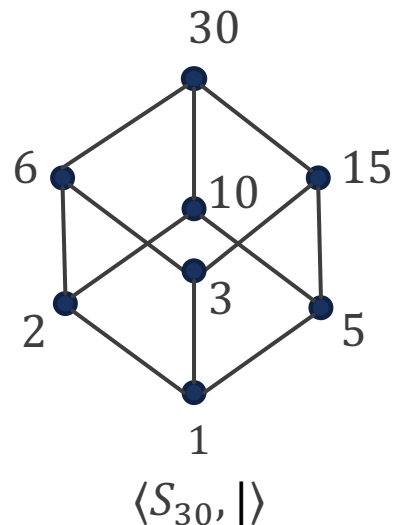
课堂练习

$S_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $\langle S_{30}, | \rangle$ 是格吗?

$S = \{1, 2, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $\langle S, | \rangle$ 是格吗?

$\langle S, | \rangle$ 是 $\langle S_{30}, | \rangle$ 的子格吗?

解 S_{30} 和 $\langle S, | \rangle$ 都是格,但 $\langle S, | \rangle$ 不是 $\langle S_{30}, | \rangle$ 的子格, 因为 $6 \wedge 15 = 3 \notin S$.



同构

定义 6.12

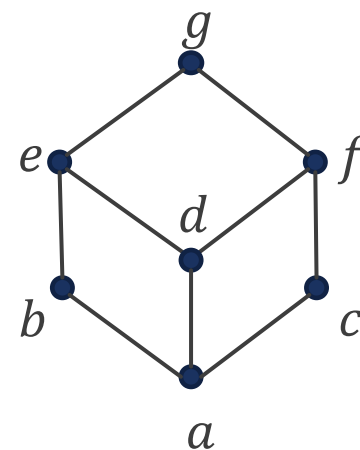
设 L_1, L_2 是格, $f: L_1 \rightarrow L_2$. 若 $\forall x, y \in L_2$ 有

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y),$$

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y),$$

则称 f 是格 L_1 到 L_2 的同态映射, 简称**同态**. 若 f 是双射, 则称 f 是**同构**.

- 同构的格的哈斯图一定相同.
- 在该图中尽管 L 的4元子格有9个, 在同构意义上只有2个.
- 在该图中尽管 L 的5元子格有5个, 在同构意义上只有3个.



分配格

定义 6.13

设 $\langle L, \wedge, \vee \rangle$ 是格, 若 \wedge 运算对 \vee 运算可分配, 或 \vee 运算对 \wedge 运算可分配, 即 $\forall a, b, c \in L$ 有

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c),$$

$$\text{或 } a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c),$$

成立, 则称 L 是分配格.



分配格

例 6.23 图中链格(1)和菱形格(2)是分配格, 钻石格(3)和五角格(4)不是分配格. 因为钻石格中有

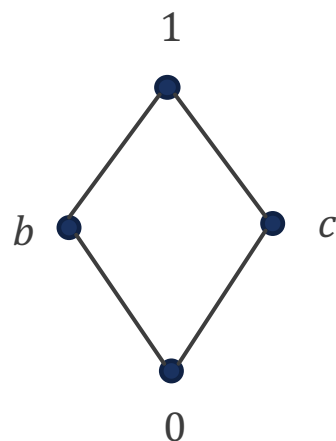
$$d \wedge (b \vee c) = d \wedge 1 = d, \quad (d \wedge b) \vee (d \wedge c) = 0 \vee 0 = 0,$$

五角格中有

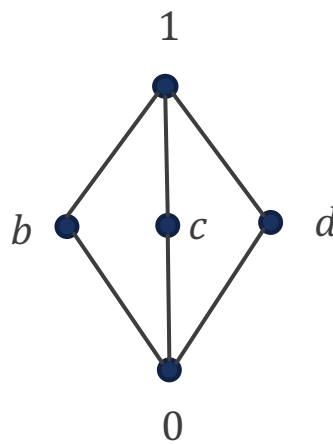
$$d \wedge (b \vee c) = d \wedge 1 = d, \quad (d \wedge b) \vee (d \wedge c) = 0 \vee c = c.$$



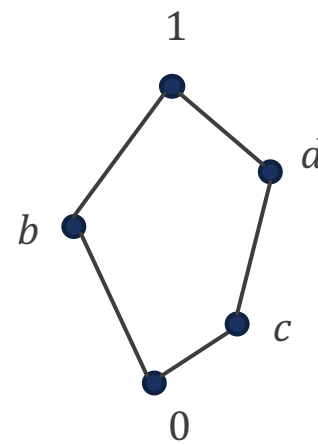
(1) 链格



(2) 菱形格



(3) 钻石格



(4) 五角格



分配格

定理 在分配格的定义中

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \Leftrightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

证明 必要性. 设 $\langle L, \vee, \wedge \rangle$ 是格, $\forall a, b, c \in L$, 若左式成立, 现证明右式

$$\begin{aligned} & a \vee (b \wedge c) \\ &= (a \vee (a \wedge c)) \vee (b \wedge c) && \text{(吸收律)} \\ &= a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) && \text{(结合律)} \\ &= a \vee ((a \vee b) \wedge c) && \text{(\wedge 对 \vee 分配律)} \\ &= ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) && \text{(吸收律)} \\ &= (a \vee b) \wedge (a \vee c) && \text{(\wedge 对 \vee 分配律)} \end{aligned}$$

充分性同理可证.



分配格

定理 6.10

(1) L 是分配格当且仅当 L 不含有与钻石格和五角格同构的子格.

(2) L 是分配格当且仅当 $\forall a, b, c \in L$ 有

$$a \wedge c = b \wedge c \text{ 且 } a \vee c = b \vee c \Rightarrow a = b.$$

推论

(1) 所有的链都是分配格.

(2) 元数小于5的格都是分配格.

■ 在验证格是否为分配格时, 最常用的方法就是找出其所有的五元子格.



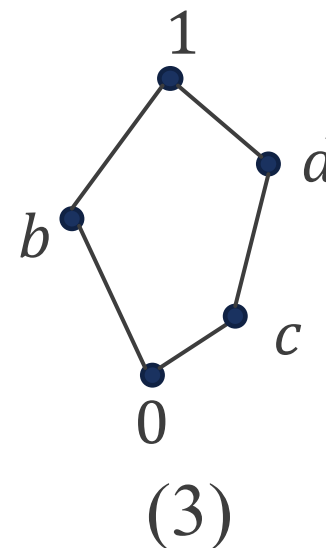
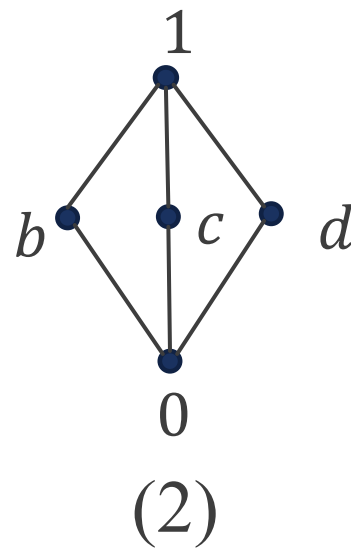
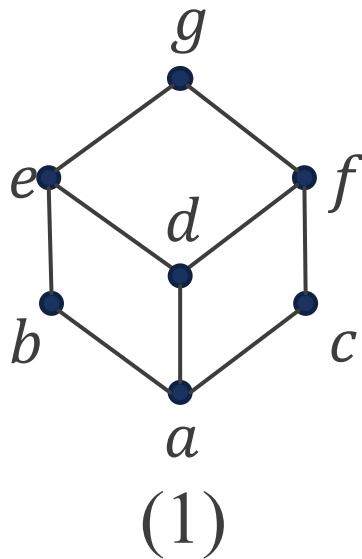
分配格

例 (1)含有子格 $\{a, b, c, f, g\}$ 与五角格同构. (2)和(3)中均有

$$b \wedge c = b \wedge d \text{ 且 } b \vee c = b \vee d$$

但是 $c \neq d$, 不满足定理6.10(2).

因此它们都不是分配格.



有界格

定义 6.14

设 L 是格,

- (1) 若存在元素 $a \in L$, 使得 $\forall b \in L$ 都有 $a \leq b$, 则称 a 是 L 的全下界, 记为 0 ;
- (2) 若存在元素 $c \in L$, 使得 $\forall b \in L$ 都有 $b \leq c$, 则称 c 是 L 的全上界, 记为 1 ;
- (3) 如果 L 存在全上界和全下界, 则称 L 为有界格. 通常将有界格记作 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$.

- 格 L 的全下界实际上就是偏序集 L 的最小元, 而全上界则是偏序集 L 的最大元.
- 而最小元和最大元如果存在, 则是惟一的. 所以有界格存在着惟一的全上界和全下界.



有界格

例 6.24 (1) 设 $L = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 是 n 元格, 则

$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$ 是 L 的全下界,

$a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$ 是 L 的全上界.

因此**有限格都是有界格**.

(2) $\langle [0, 1], \leq \rangle$ 是有界格, 但不是有限格, 所以**有界格不一定是有限格**.

(2) 集合 B 的幂集格 $P(B)$ 是有界格, 其中全下界是 \emptyset , 全上界是 B .

(3) 群 G 的子群格 $L(G)$ 是有界格, 其中全下界是平凡子群 $\{e\}$, 全上界是平凡子群 G .

(4) $\langle \mathbf{Z}, \leq \rangle$ 不是有界格, 因为既没有最大的整数, 也没有最小的整数.

定义 6.15

设 $\langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ 是有界格, $a \in L$, 如果存在 $b \in L$ 使得

$$a \wedge b = 0, \quad a \vee b = 1$$

则称 b 是 a 的补元. 如果 L 中的每个元素都存在补元, 则称 L 是有补格.

- 补元是相互的, 即 b 是 a 的补元, 那么 a 也是 b 的补元.

有补格

例 6.25 (1)中0与1互为补元, b 和 c 无补元; 不是有补格.

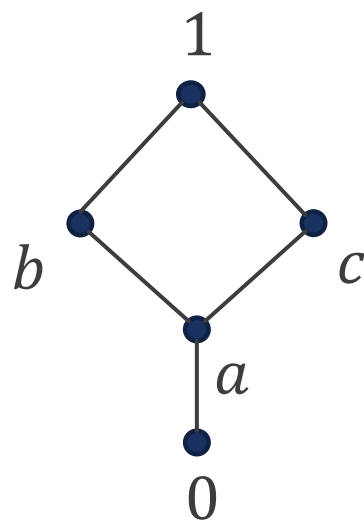
(2)中0与1互为补元, a, b, c 无补元; 不是有补格.

(3)中0与1互为补元, b 的补元是 c 和 d , c 的补元是 b 和 d , d 的补元是 b 和 c . 是有补格.

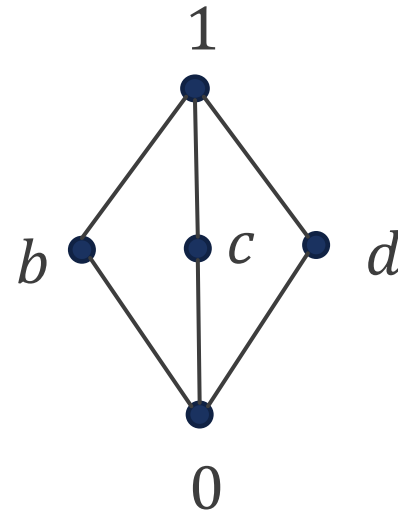
(4)中0与1互为补元, b 的补元是 c 和 d , c 的补元是 b , d 的补元是 b . 是有补格.



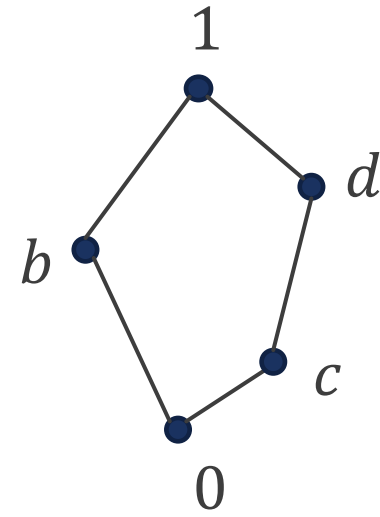
(1)



(2)



(3)



(4)

有补格

- L 是有界格, 对任何元素 $a \in L$, a 的补元可能不存在, 如果存在也可能不是唯一的.

例 6.26 证明在分配格 L 中, $a \in L$, 若 a 存在补元, 一定是唯一的.

证明 设 L 是分配格, 假设 b 和 c 都是 a 的补元, 则有

$$a \vee b = a \vee c = 1, \quad a \wedge b = a \wedge c = 0.$$

从而有 $a \vee b = a \vee c$ 和 $a \wedge b = a \wedge c$,

根据定理6.10(2)分配格有 $b = c$, 所以 a 的补元是唯一的.



课堂练习

下列各集合对于整除关系都构成偏序集, 画出哈斯图并判断哪些偏序集是格. 如果是格, 判断是否是分配格和有补格.

(1) $L = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(2) $L = \{1, 2, 4, 9, 36\}$.

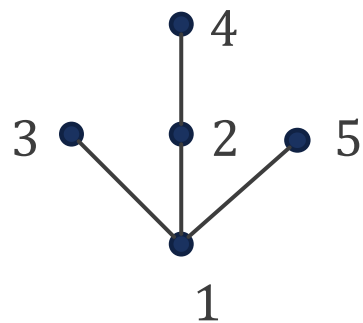
(3) $L = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$.

(4) $L = \{1, 2, 2^2, \dots, 2^n\}, n \in \mathbf{Z}^+$



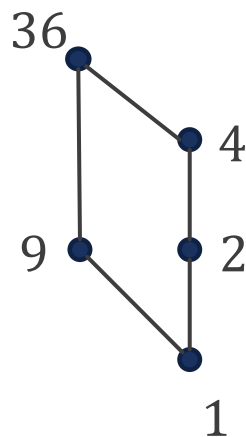
课堂练习

(1)



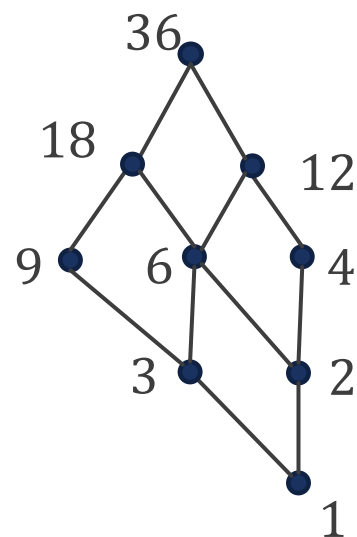
不是格

(2)



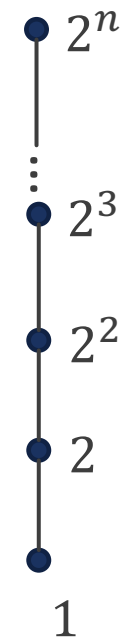
是格, 不是分配格, 是有补格

(3)



是格, 是分配格, 不是有补格

(4)



是格, 是分配格, 不是有补格



布尔代数

定义 6.16

有补分配格称为布尔格, 也叫作布尔代数.

- 布尔格中的每个元素都有补元存在, 并且是唯一的, 因此可以把求补运算看作是布尔格中的一元运算.
- 通常将 a 的补元记作 a' , 并将布尔格 B 记作 $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$.

例 (1) 集合 B 的幂集格 $\langle P(B), \cap, \cup, \sim, \emptyset, B \rangle$ 是布尔代数, 称集合代数, 其中 \cap 和 \cup 分别为集合的交和并运算, \sim 是绝对补运算 (全集是 B).

(2) 命题代数 $\langle S, \wedge, \vee, \neg, 0, 1 \rangle$ 是布尔代数, S 为命题公式集合.

(3) 钻石格和五角格不是分配格, 长度大于2的链格不是有补格, 因此它们都不是布尔格.

布尔代数

- 从代数系统的角度可以把布尔代数看作是具有两个二元运算, 一个一元运算和两个零元的代数系统, 其中二元运算满足交换律, 结合律, 吸收律, 幂等律和分配律, 而一元运算为求补运算.
- 反过来, 也可以通过规定集合上的运算和算律来定义一个布尔代数.



布尔代数

定义 6.17

设 $\langle B, *, \circ, ', 0, 1 \rangle$ 是代数系统, $*$ 和 \circ 是二元运算, $'$ 是一元运算, $0, 1 \in B$ 是代数常数, 满足:

(1) 交换律, 即 $\forall a, b \in B$ 有

$$a * b = b * a, \quad a \circ b = b \circ a,$$

(2) 分配律, 即 $\forall a, b, c \in B$ 有

$$a * (b \circ c) = (a * b) \circ (a * c), \quad a \circ (b * c) = (a \circ b) * (a \circ c),$$

(3) 同一律, 1 是 $*$ 的单位元和 \circ 的零元, 0 是 \circ 的单位元和 $*$ 的零元即 $\forall a \in B$ 有,

$$a * 1 = a, \quad a \circ 0 = a, \quad a * 0 = 0, \quad a \circ 1 = 1,$$

(4) 补元律, 即 $\forall a \in B$ 有

$$a * a' = 0, \quad a \circ a' = 1,$$

则称 $\langle B, *, \circ, ', 0, 1 \rangle$ 是一个布尔代数.



- 为了证明通过该定义的布尔代数也是格，只需证明 $*$ 和 \circ 运算满足结合律和吸收律即可。

证明 吸收律. $\forall a, b \in B$, 有

$$a \circ (a * b) = (a * 1) \circ (a * b) = a * (1 \circ b) = a * 1 = a.$$

同理可证 $a * (a \circ b) = a$.



布尔代数

证明 结合律. 首先证明以下命题, $\forall a, b, c \in B$,

$$a \circ b = a \circ c \text{ 且 } a' \circ b = a' \circ c \Rightarrow b = c.$$

两边同时加上*运算可得

$$\begin{aligned}(a \circ b) * (a' \circ b) &= (a \circ c) * (a' \circ c) \\ \Rightarrow (a * a') \circ b &= (a * a') \circ c \\ \Rightarrow 0 \circ b &= 0 \circ c \\ \Rightarrow b &= c.\end{aligned}$$

由该结论, 为了证明结合律 $a * (b * c) = (a * b) * c$, 只需证明以下两个等式即可:

$$\begin{aligned}a \circ (a * (b * c)) &= a \circ ((a * b) * c), \\ a' \circ (a * (b * c)) &= a' \circ ((a * b) * c).\end{aligned}$$



布尔代数

对于 a , 由吸收律和分配律有

$$a \circ (a * (b * c)) = a,$$

$$a \circ ((a * b) * c) = (a \circ (a * b)) * (a \circ c) = a * (a \circ c) = a,$$

所以 $a \circ (a * (b * c)) = a \circ ((a * b) * c)$.

对于 a' , 由吸收律和分配律有

$$\begin{aligned} a' \circ (a * (b * c)) &= (a' \circ a) * (a' \circ (b * c)) \\ &= 1 * (a' \circ (b * c)) = a' \circ (b * c), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a' \circ ((a * b) * c) &= (a' \circ (a * b)) * (a' \circ c) \\ &= ((a' \circ a) * (a' \circ b)) * (a' \circ c) \\ &= (1 * (a' \circ b)) * (a' \circ c) \\ &= (a' \circ b) * (a' \circ c) = a' \circ (b * c), \end{aligned}$$

所以 $a' \circ (a * (b * c)) = a' \circ ((a * b) * c)$.



布尔代数

不难证明布尔代数 $\langle B, \wedge, \vee, ', 0, 1 \rangle$ 有以下性质:

(1) $\forall a \in B$, 补元 a' 是惟一的;

(2) 双重否定律: $\forall a \in B, (a')' = a$;

(3) 德·摩根律:

$$\forall a, b \in B, (a \wedge b)' = a' \vee b', (a \vee b)' = a' \wedge b'$$

(4) $\forall a, b \in B, a \leq b \Leftrightarrow b' \leq a'$.



格

偏序集 $\langle L, \leq \rangle$

格

(任意两个元素有最大下界和最小上界, 满足交换律, 结合律, 吸收律, 幂等律)

分配格

$$(a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c))$$

有界格

(有全下界和全上界)

有补格
(补元)

有限格
(有限元素)

布尔格

(有补分配格, 满足交换律, 结合律, 吸收律, 幂等律, 分配律)



作业

P142

1 (1)(4)(5)

5

6

7

11

12

15

16 (1)(3)

18



谢谢

有问题欢迎随时跟我讨论

